المحاضرة الثانية ((عملي))

ليكن لدينا التطبيق التالي $f: R^4 \to R^3$ حيث

$f(x,y,z,t) = (x-y+z+t, x+2z-t, x+y+3z-3t)$

أثبت أنه تطبيق خطي وكذلك برهنة البعد

الحل: نأخذ القاعدة القانونية في المنطلق

$E = (e_1(1,0,0,0)\ e_2(0,1,0,0)\ e_3(0,0,1,0)\ e_4(0,0,0,1))$

نوجد صورة E وفق f فتكون مولدة لـ Im f

$f(1,0,0,0) = (1,1,1)$

$f(0,1,0,0) = (-1,0,1)$

$f(0,0,1,0) = (1,2,3)$

$f(0,0,0,1) = (1,-1,-3)$

نلاحظ أن $E = \{(1,1,1)\ (-1,0,1)\ (1,2,3)\ (1,-1,-3)\}$

مولدة لـ Im f نوجد أكبر جملة مستقلة خطياً منها فتكون قاعدة

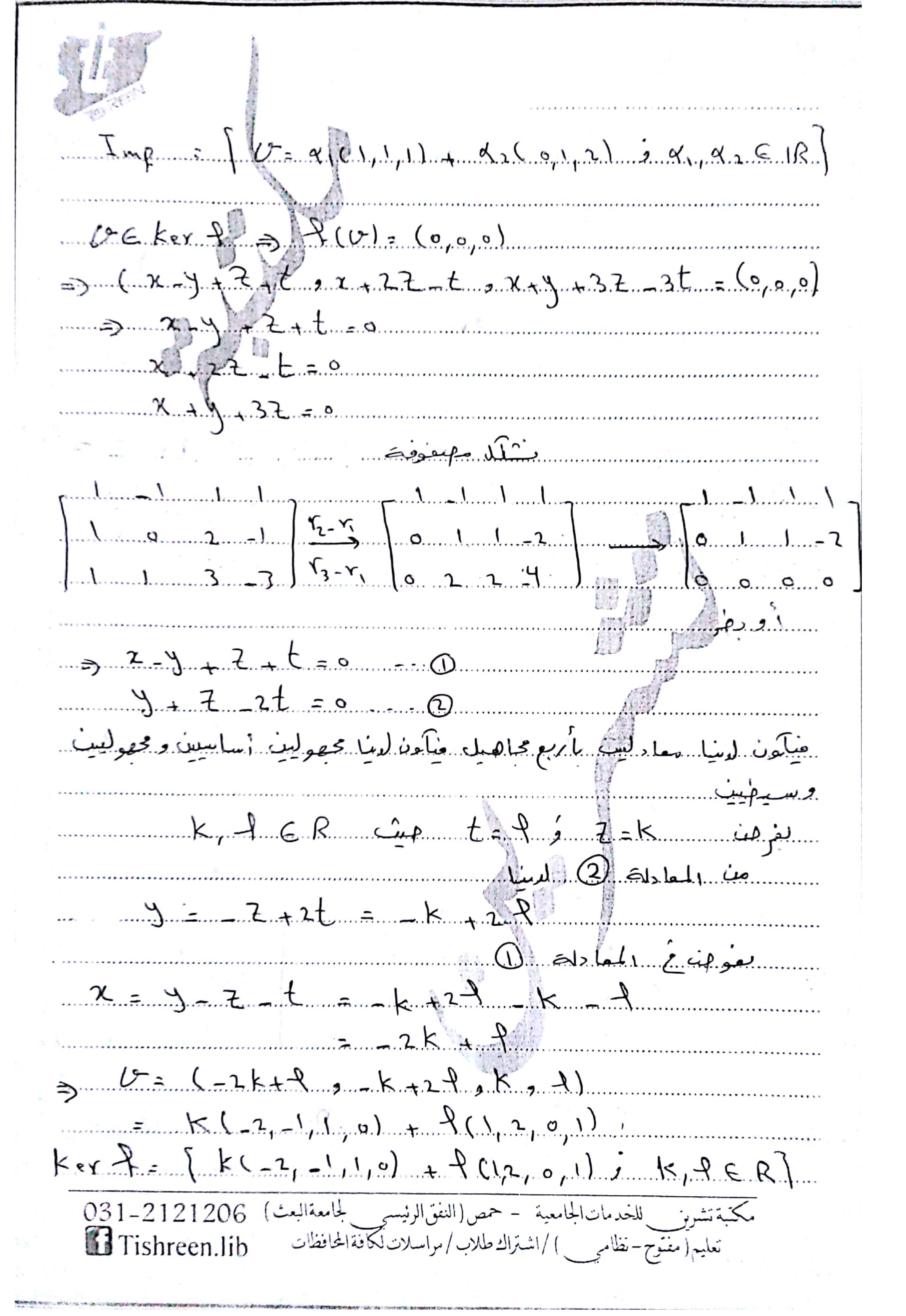
لـ Im f

نشكل مصفوفة ونحولها إلى مصفوفة متدرجة

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3 - r_1 \\ r_4 - r_1}]{r_2 + r_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_4 - 2r_2]{r_3 - r_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن $E^n = \{(1,1,1), (0,1,2)\}$ قاعدة لـ Im f

وبما أن عدد عناصر E^n يساوي 2 $\Leftarrow$ $d(\text{Im} f = 2)$



$Im\ f = \{ v = \alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(0,1,2) ; \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \}$

$v \in \ker f \Rightarrow f(v) = (0,0,0)$

$\Rightarrow (x - y + z + t , x + 2z - t , x + y + 3z - 3t) = (0,0,0)$

$\Rightarrow x - y + z + t = 0$

$x + 2z - t = 0$

$x + y + 3z = 0$

بشكل مصفوفة

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - r_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

أو بحسو

$\Rightarrow x - y + z + t = 0 \quad \ldots (1)$

$y + z - 2t = 0 \quad \ldots (2)$

فيكون لدينا معادلتين بأربع مجاهيل فيكون لدينا مجهولين أساسيين ومجهولين وسيطيين

نفرض $z = k$ و $t = l$ حيث $k, l \in R$

من المعادلة (2) لدينا

$y = -z + 2t = -k + 2l$

بعوض في المعادلة (1)

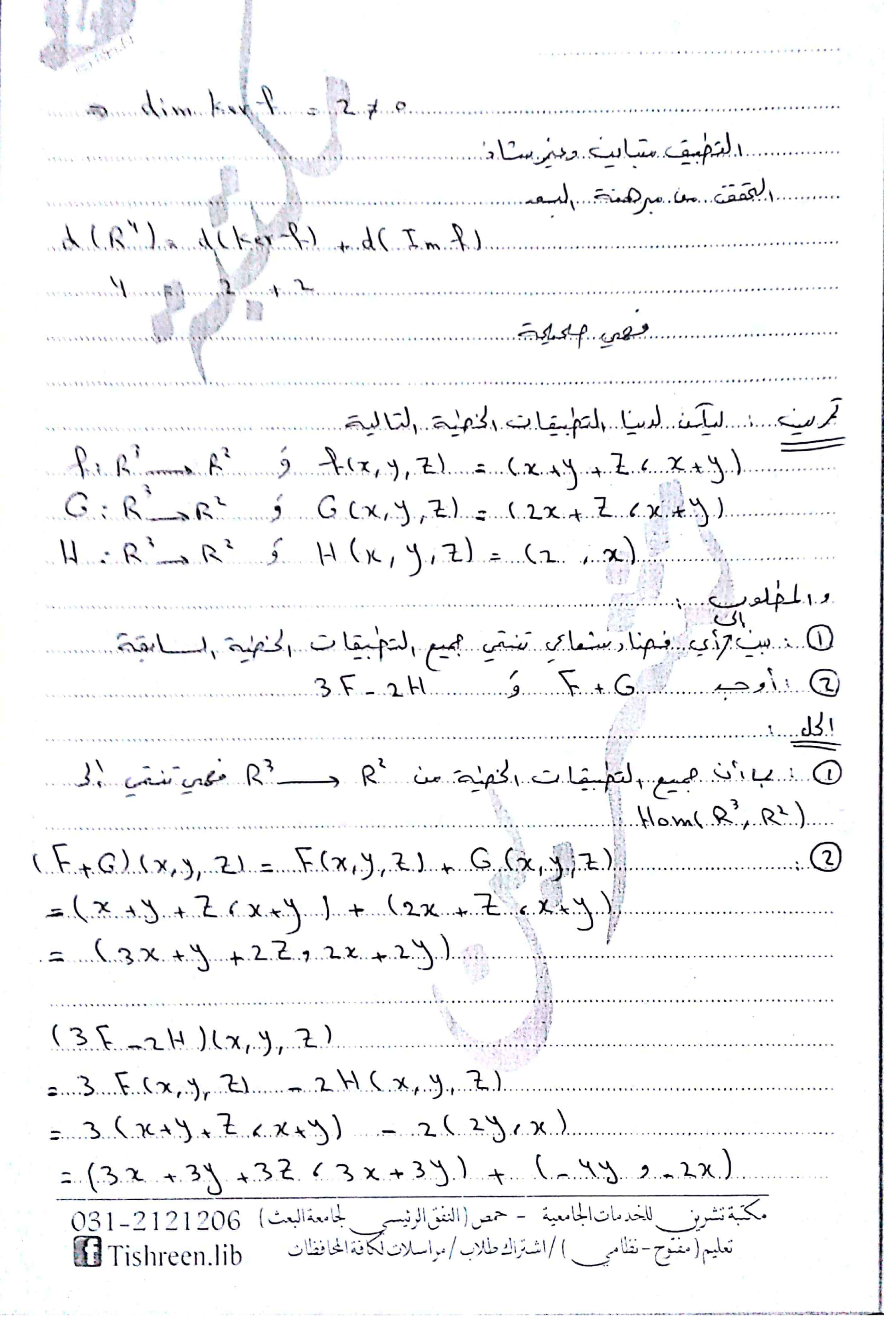
$x = y - z - t = -k + 2l - k - l$

$= -2k + l$

$\Rightarrow v = (-2k + l , -k + 2l , k , l)$

$= k(-2,-1,1,0) + l(1,2,0,1)$

$\ker f = \{ k(-2,-1,1,0) + l(1,2,0,1) ; k, l \in R \}$



$\Rightarrow \dim \ker f = 2 \neq 0$

التطبيق متباين وغير شامل

التحقق من مبرهنة البعد

$d(R^4) = d(\ker f) + d(\operatorname{Im} f)$

$4 = 2 + 2$

فهي محققة

تمرين: ليكن لدينا التطبيقات الخطية التالية

$f : R^3 \longrightarrow R^2$ و $f(x, y, z) = (x + y + z , x + y)$

$G : R^3 \longrightarrow R^2$ و $G(x, y, z) = (2x + z , x + y)$

$H : R^3 \longrightarrow R^2$ و $H(x, y, z) = (z , x)$

والمطلوب:

① : بين إلى أي فضاء شعاعي تنتمي جميع التطبيقات الخطية السابقة

② : أوجد $F + G$ و $3F - 2H$

الحل:

① : بما أن جميع التطبيقات الخطية من $R^3 \longrightarrow R^2$ فهي تنتمي إلى $\operatorname{Hom}(R^3, R^2)$

② : $(F + G)(x, y, z) = F(x, y, z) + G(x, y, z)$

$= (x + y + z , x + y) + (2x + z , x + y)$

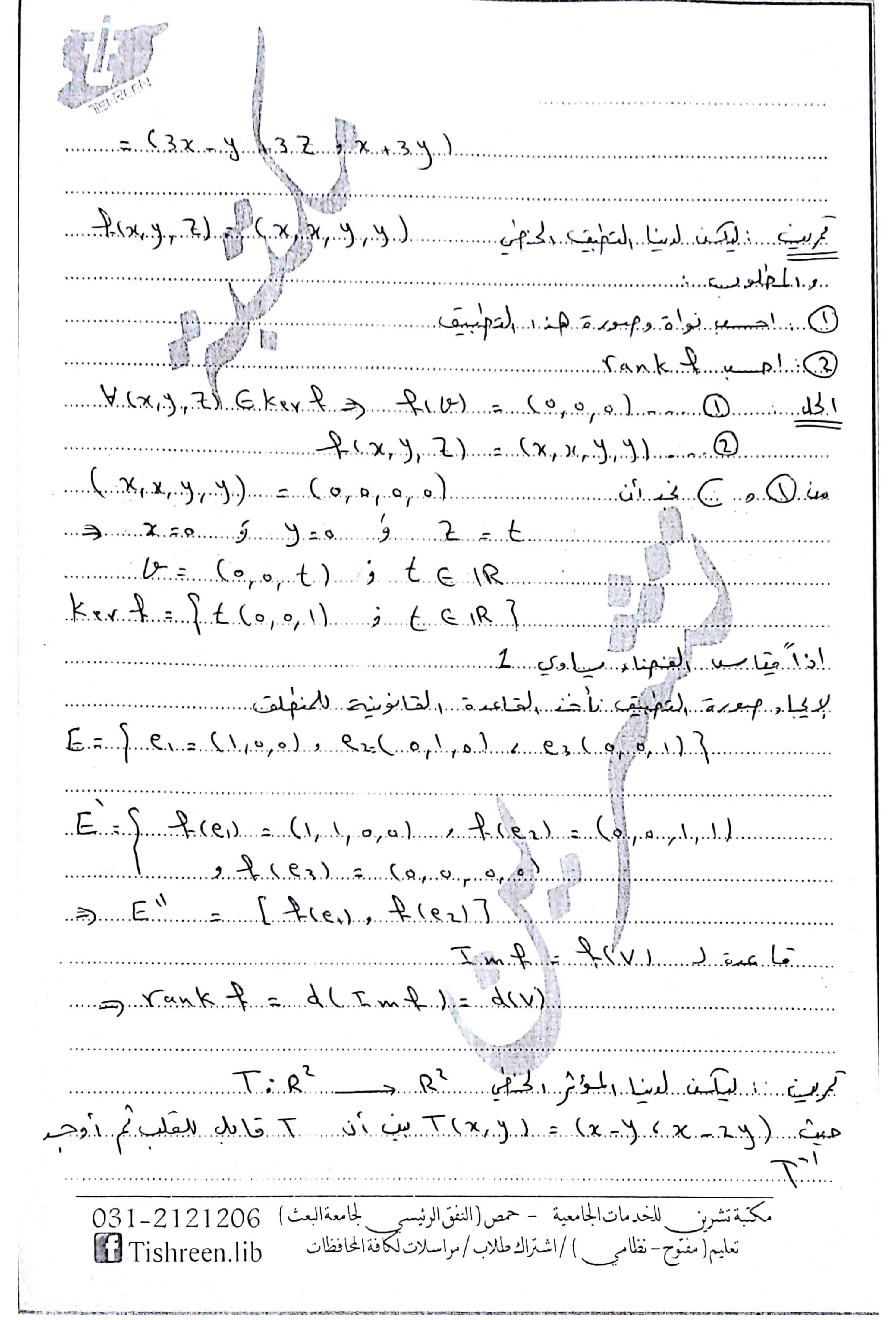
$= (3x + y + 2z , 2x + 2y)$

$(3F - 2H)(x, y, z)$

$= 3F(x, y, z) - 2H(x, y, z)$

$= 3(x + y + z , x + y) - 2(2y , x)$

$= (3x + 3y + 3z , 3x + 3y) + (-4y , -2x)$



$= (3x - y , 3z , x + 3y)$

تمرين: ليكن لدينا التطبيق الخطي $f(x,y,z) = (x,x,y,y)$

والمطلوب:

① احسب نواة وصورة هذا التطبيق

② احسب $\text{rank } f$

الحل ① $\forall (x,y,z) \in \ker f \Rightarrow f(v) = (0,0,0) \ldots ①$

$f(x,y,z) = (x,x,y,y) \ldots ②$

من ① و ② نجد أن $(x,x,y,y) = (0,0,0,0)$

$\Rightarrow x = 0$ و $y = 0$ و $z = t$

$v = (0,0,t) \; ; \; t \in \mathbb{R}$

$\ker f = \{ t(0,0,1) \; ; \; t \in \mathbb{R} \}$

إذاً قياس الفضاء يساوي 1

لإيجاد صورة التطبيق نأخذ القاعدة القانونية للمنطلق

$E = \{ e_1 = (1,0,0) , e_2 (0,1,0) , e_3 (0,0,1) \}$

$E' = \{ f(e_1) = (1,1,0,0) , f(e_2) = (0,0,1,1)$

$, f(e_3) = (0,0,0,0) \}$

$\Rightarrow E'' = [f(e_1) , f(e_2)]$

قاعدة لـ $\text{Im } f = f(V)$

$\Rightarrow \text{rank } f = d(\text{Im } f) = d(V)$

تمرين: ليكن لدينا المؤثر الخطي $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

حيث $T(x,y) = (x - y , x - 2y)$ بين أن T قابل للقلب ثم أوجد T^{-1}

فكرة الحل: يكون المؤثر الخطي $T : R^2 \longrightarrow R^2$ قابل للقلب إذا كان تقابل (متباين وغامر) وبما أنه لدينا مؤثر خطي T فيكفي لإثبات أنه قابل للقلب أن يكون إما متباين أو غامر
نثبت أنه متباين

بما أن T مؤثر خطي فيكون قابل للقلب إذا كان $\ker f = [0_v]$

$\forall (x,y) \in \ker f \Rightarrow T(x,y) = (0,0) \ldots (1)$

$\Rightarrow T(x,y) = (x-y,\ x-2y) \ldots (2)$

من (1) و (2) نجد أن

$(x-y,\ x-2y) = (0,0) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-y=0 \\ x-2y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x=y=0$

$\Rightarrow (x,y) = (0,0) \Rightarrow \ker f = [0_v]$

وبالتالي T متباين وقابل للقلب

بفرض أن مقلوب المؤثر $T^{-1}(x,y) = (a,b)$

$\Rightarrow T(a,b) = (x,y) \ldots (1)$

$T(a,b) = (a-b,\ a-2b) \ldots (2)$

من (1) و (2) نجد $(x,y) = (a-b,\ a-2b)$

$a-b = x \ldots (1)$

$a-2b = y \ldots (2)$

من (1) نجد أن $a = x+b$ نعوض في (2) نجد $x+b-2b = y$

$\Leftarrow b = x-y$ نعوض في a نجد $a = x+x-y = 2x-y$

$\Rightarrow T^{-1}(x,y) = (2x-y,\ x-y)$

للتأكد من الحل $T(T^{-1}(x,y)) = T(2x-y,\ x-y)$

<< انتهت المحاضرة الثانية >>

<< مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح >> إعداد: فاطمة الشميس